

**WYPEŁNIA ZDAJĄCY**

**KOD**

--	--	--

**PESEL**

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Miejsce na naklejkę.**

Sprawdź, czy kod na naklejce to

**M-100.**

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.

Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

**Egzamin maturalny**

**Formuła 2023**

**MATEMATYKA**

**Poziom rozszerzony**

*Symbol arkusza*

**M**MAP-R0-**100**-2505

**DATA: 12 maja 2025 r.**

**GODZINA ROZPOCZĘCIA: 9:00**

**CZAS TRWANIA: 180 minut**

**LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: 50**

**Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym**

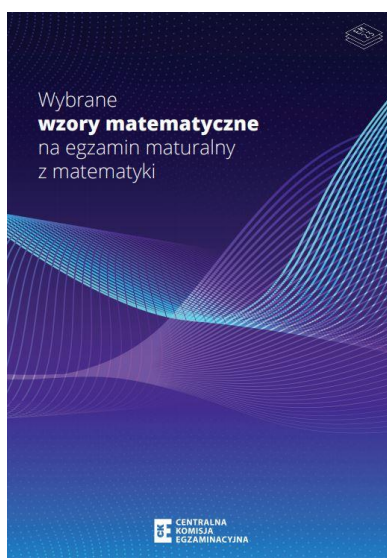
1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.





## Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 29 stron (zadania 1–12). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla egzaminatora. Tabelki są umieszczone na marginesie przy każdym zadaniu.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, z cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



**Zadania egzaminacyjne są wydrukowane  
na następnych stronach.**

### Zadanie 1. (0–2)

W warunkach laboratoryjnych obserwowano dynamikę wzrostu liczebności populacji pewnego gatunku bakterii. Liczebność  $N$  populacji bakterii zmienia się w czasie zgodnie z zależnością wykładniczą

$$N(t) = N_0 \cdot k^t \quad \text{dla} \quad t \geq 0$$

gdzie:

$N_0$  – liczebność populacji w chwili  $t = 0$  rozpoczęcia obserwacji,

$k$  – stała dodatnia, charakterystyczna dla danego gatunku bakterii i dla warunków przeprowadzenia obserwacji,

$t$  – czas wyrażony w godzinach, liczony od chwili  $t = 0$  rozpoczęcia obserwacji.

W chwili rozpoczęcia obserwacji liczebność populacji była równa 10 000, a po dwóch godzinach była równa 15 625.

1.
0-1-2

1.
0-1-2

**Oblicz, o ile procent wzrastała liczebność populacji tej bakterii w ciągu każdej godziny. Zapisz obliczenia.**

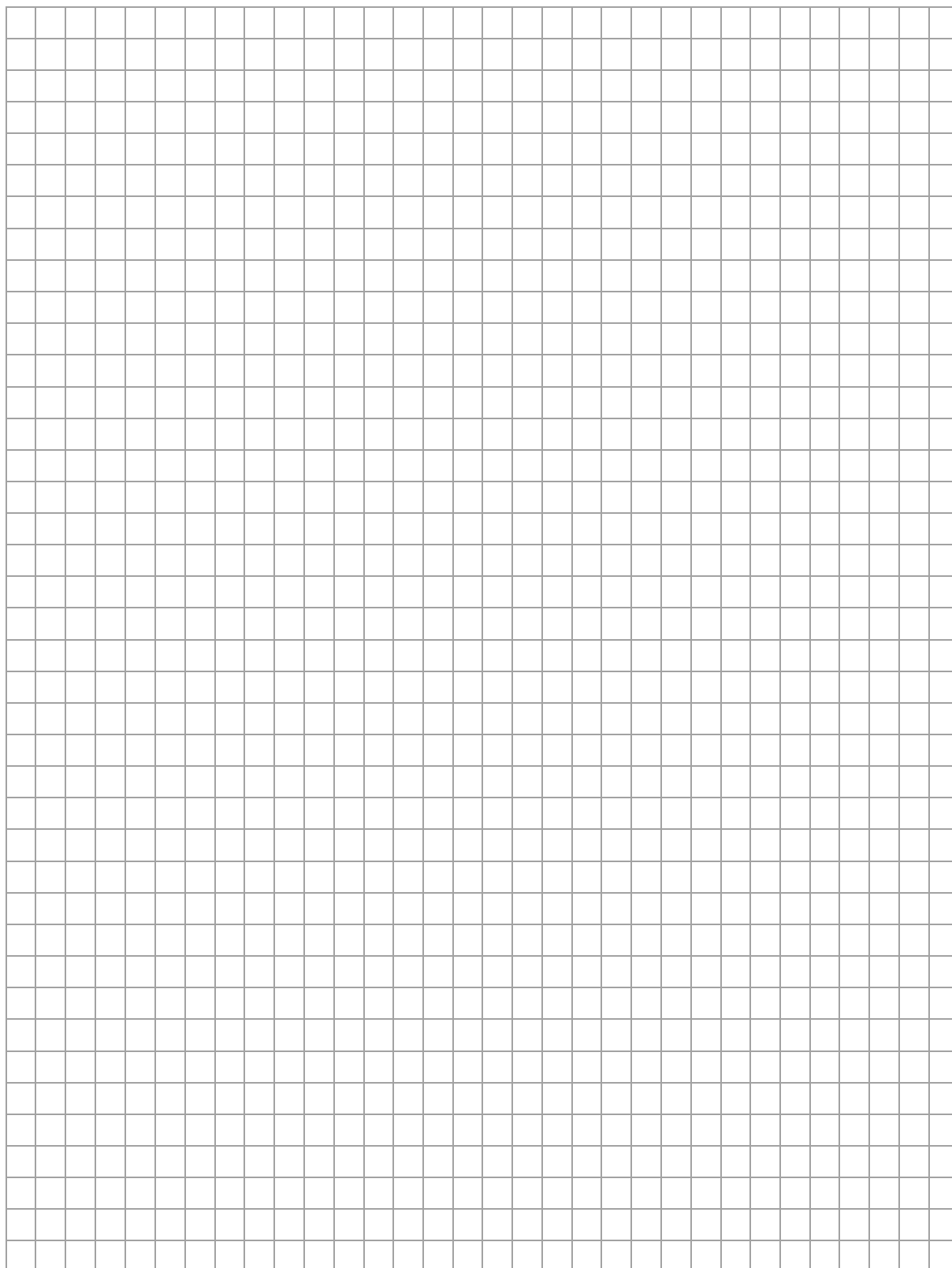
This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

**Zadanie 2. (0–3)**

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej  $a$  i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej  $b$  takich, że  $b \neq \frac{1}{2}a$ , prawdziwa jest nierówność

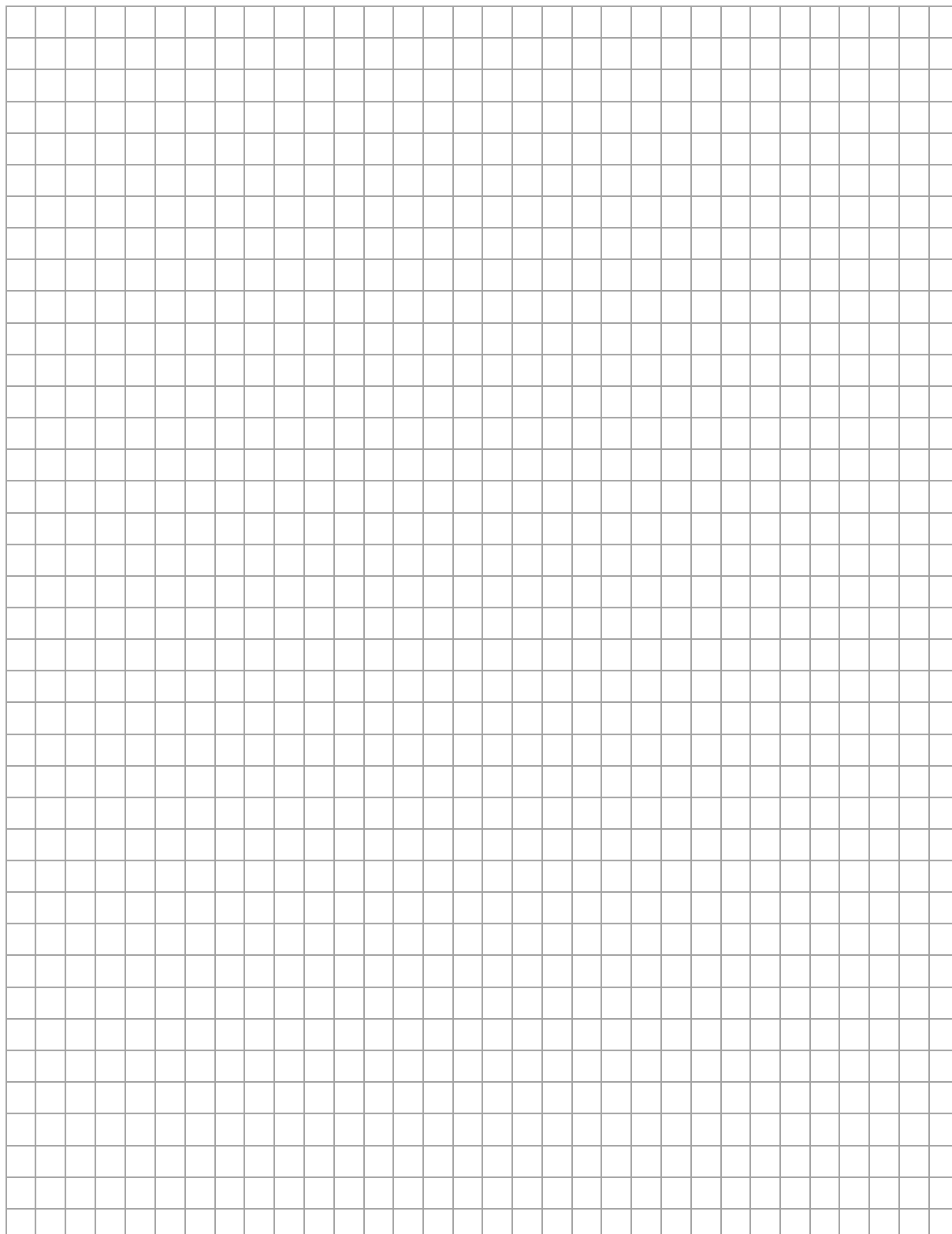
$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

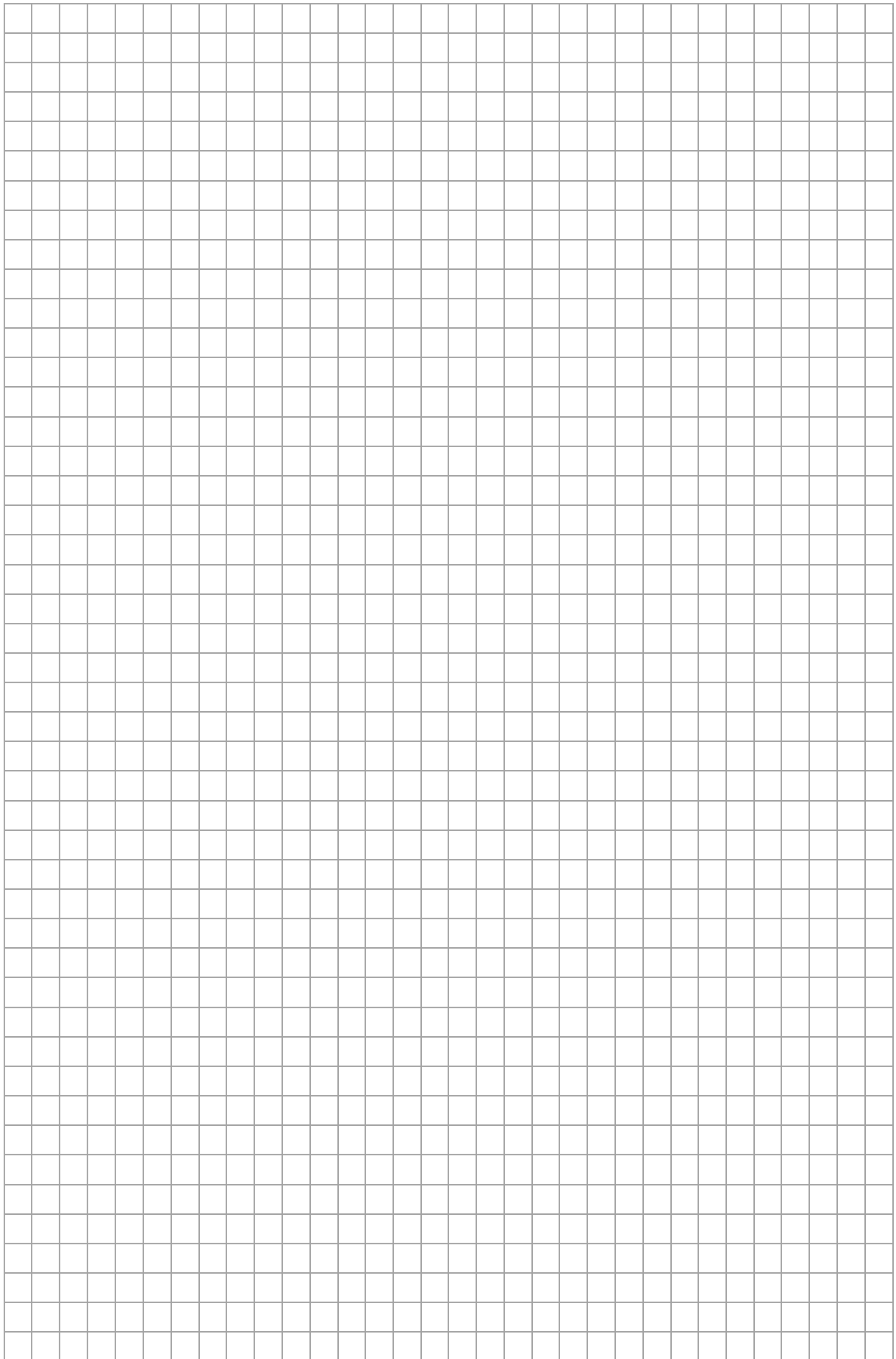
2.

0–1–  
2–3

**Zadanie 3. (0–3)**

W trójkącie równobocznym  $ABC$  punkt  $D$  leży na boku  $BC$ . Stosunek pola trójkąta  $ABD$  do pola trójkąta  $ADC$  jest równy  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ .

**3.**0–1–  
2–3**Oblicz miarę kąta  $DAC$ . Zapisz obliczenia.**



#### Zadanie 4. (0–3)

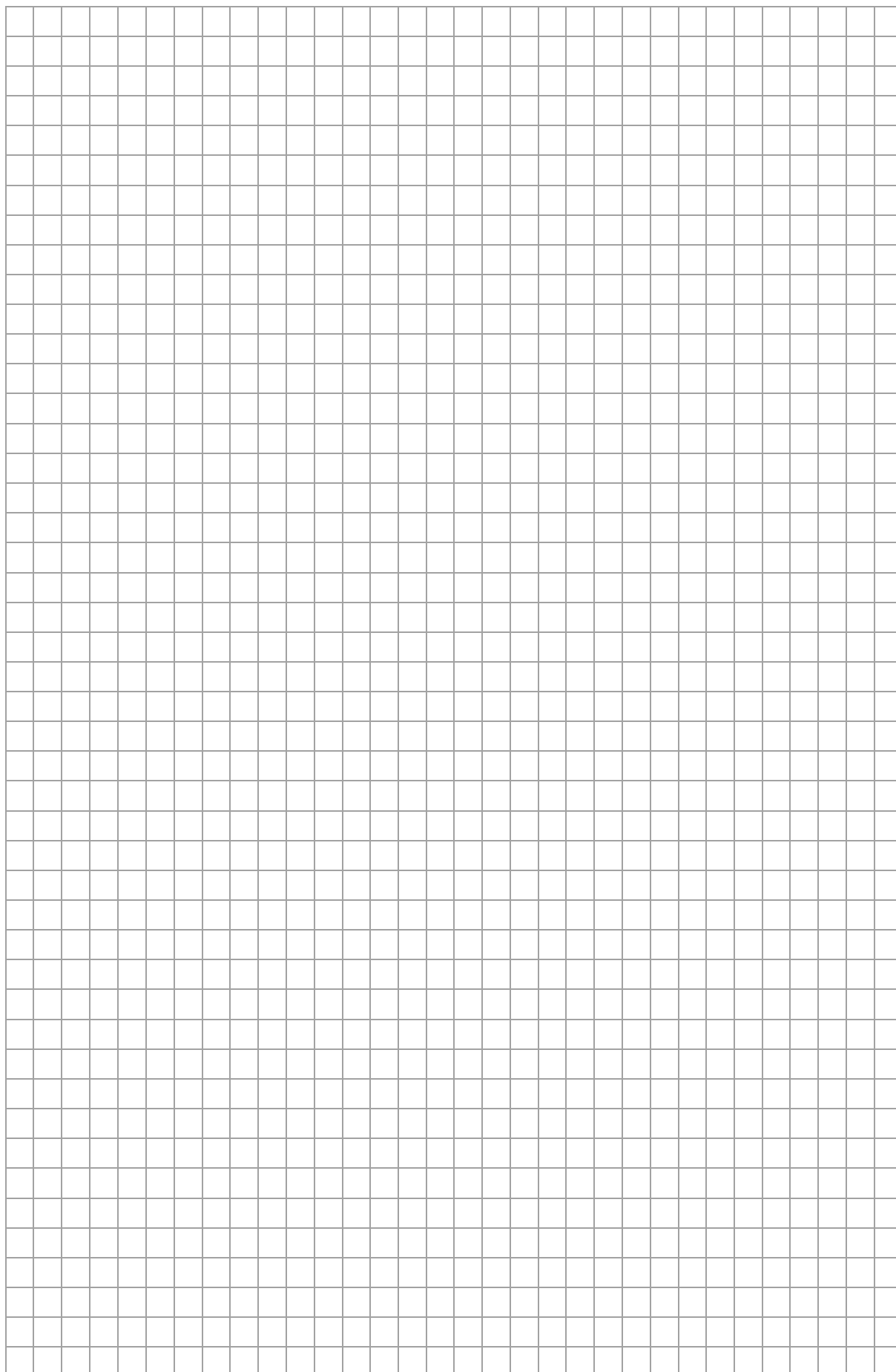
Doświadczenie losowe polega na czterokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek.

11

**Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy co najmniej jeden raz sześć oczek, pod warunkiem że otrzymamy dokładnie dwa razy pięć oczek. Zapisz obliczenia.**

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.



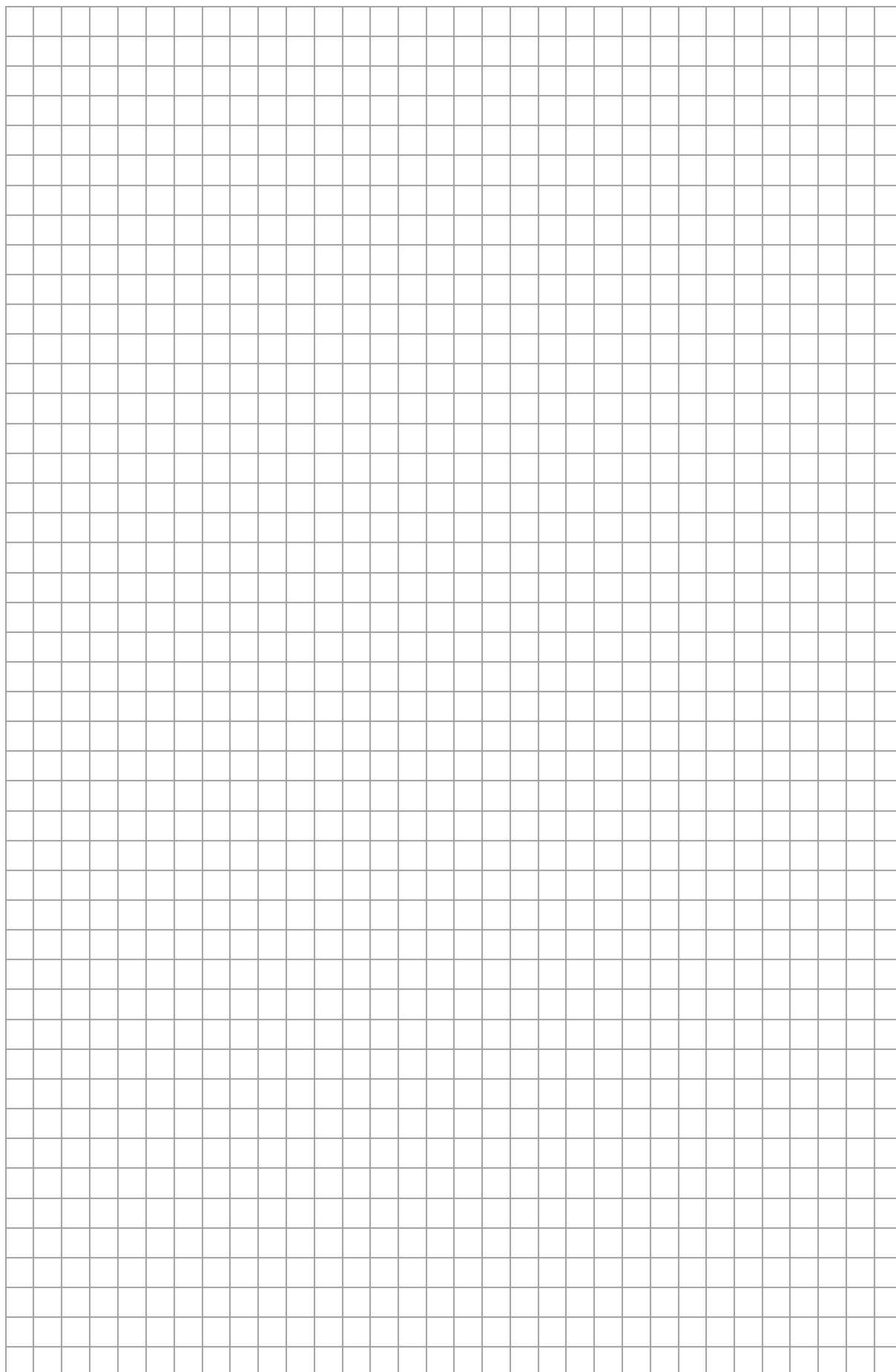


0-1-
2-3-4

### Rozwiąż nierówność

**Zapisz obliczenia.**

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.



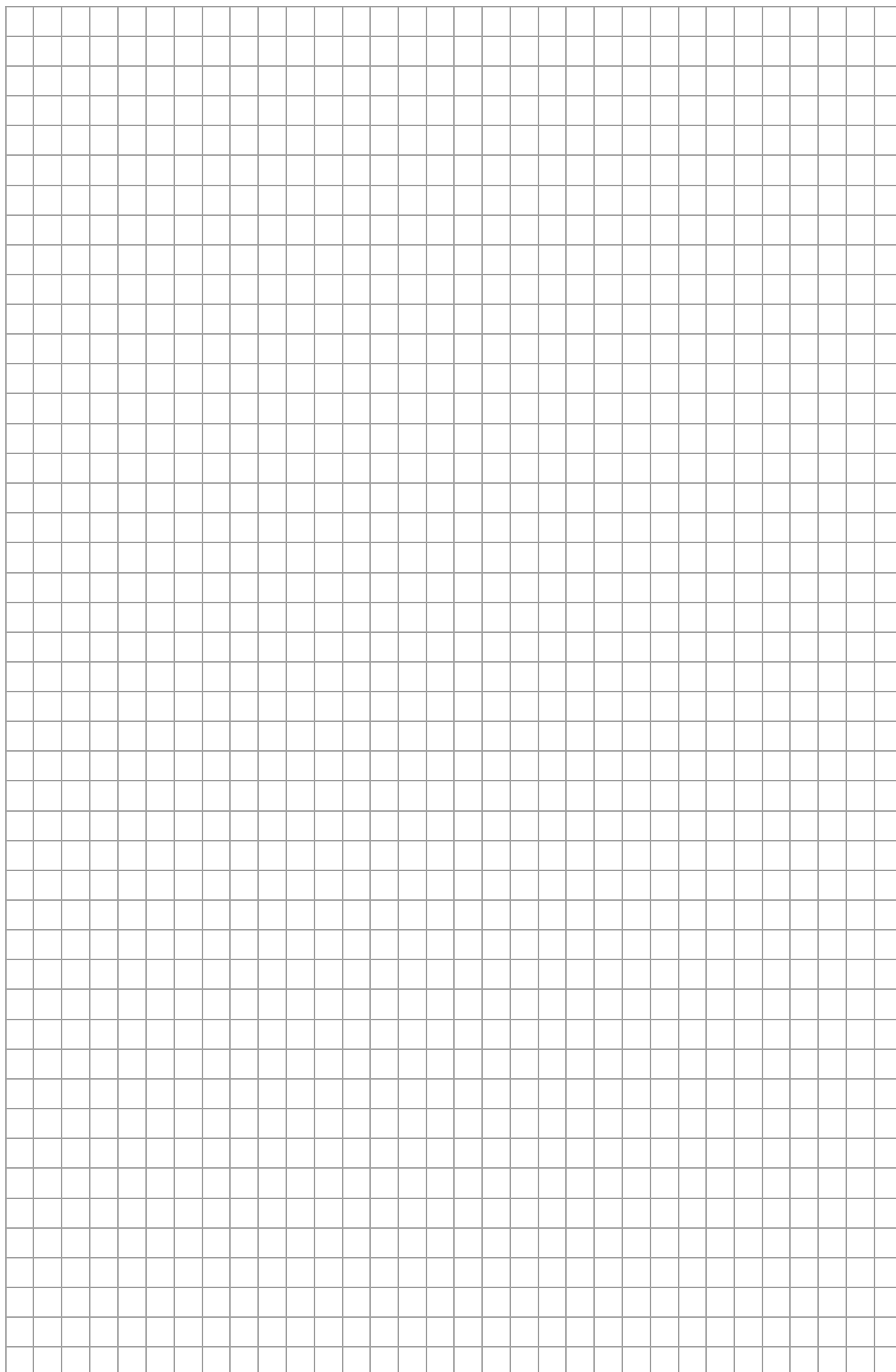
**Zadanie 6. (0–4)**

Ciąg  $(a_n)$ , określony dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ , jest geometryczny i zbieżny.  
W tym ciągu  $a_1 + a_3 = 20$  i  $a_1^2 + a_3^2 = 328$ .

**6.**0–1–  
2–3–4

**Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu. Rozważ wszystkie przypadki.  
Zapisz obliczenia.**





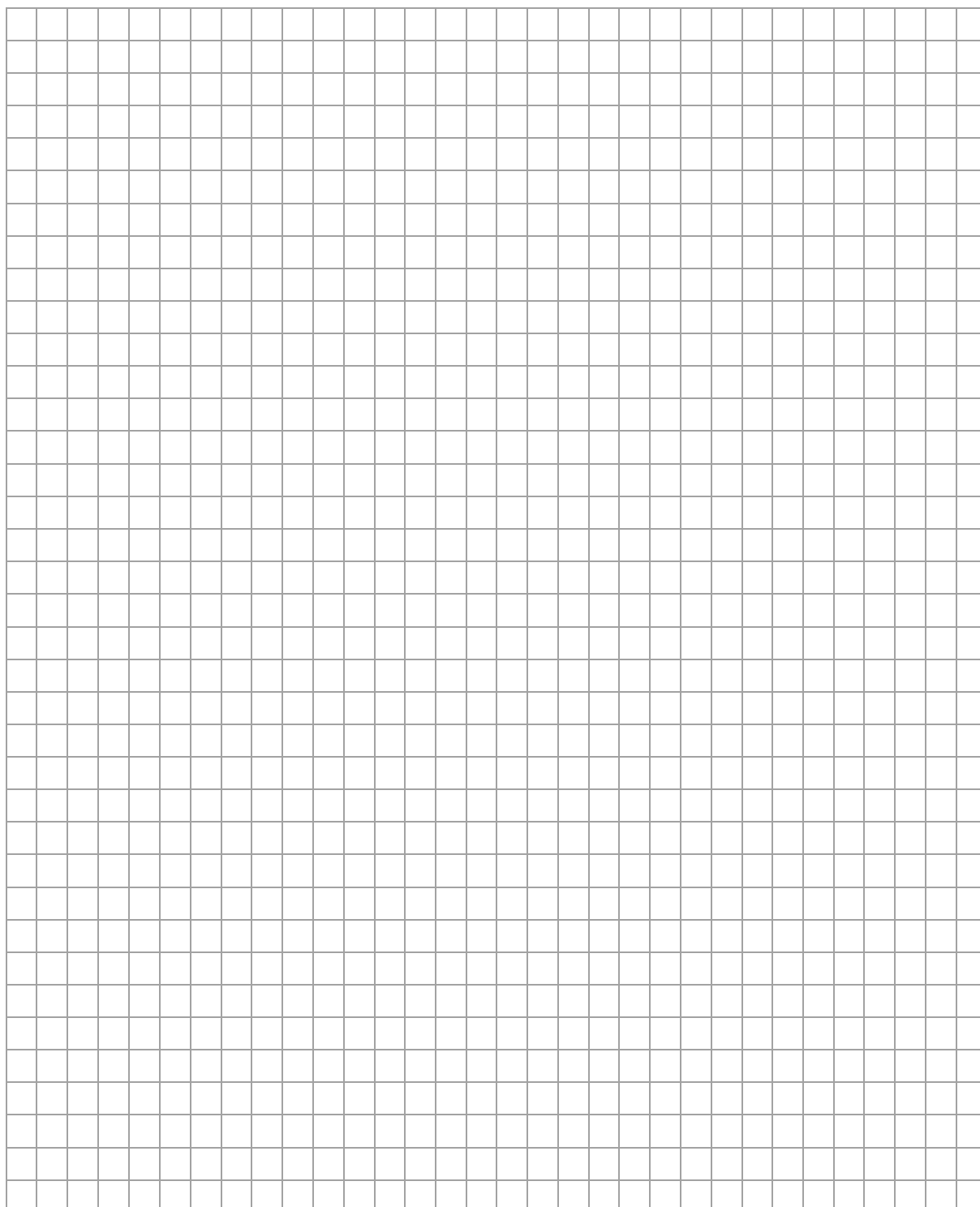
**Zadanie 7. (0–4)**

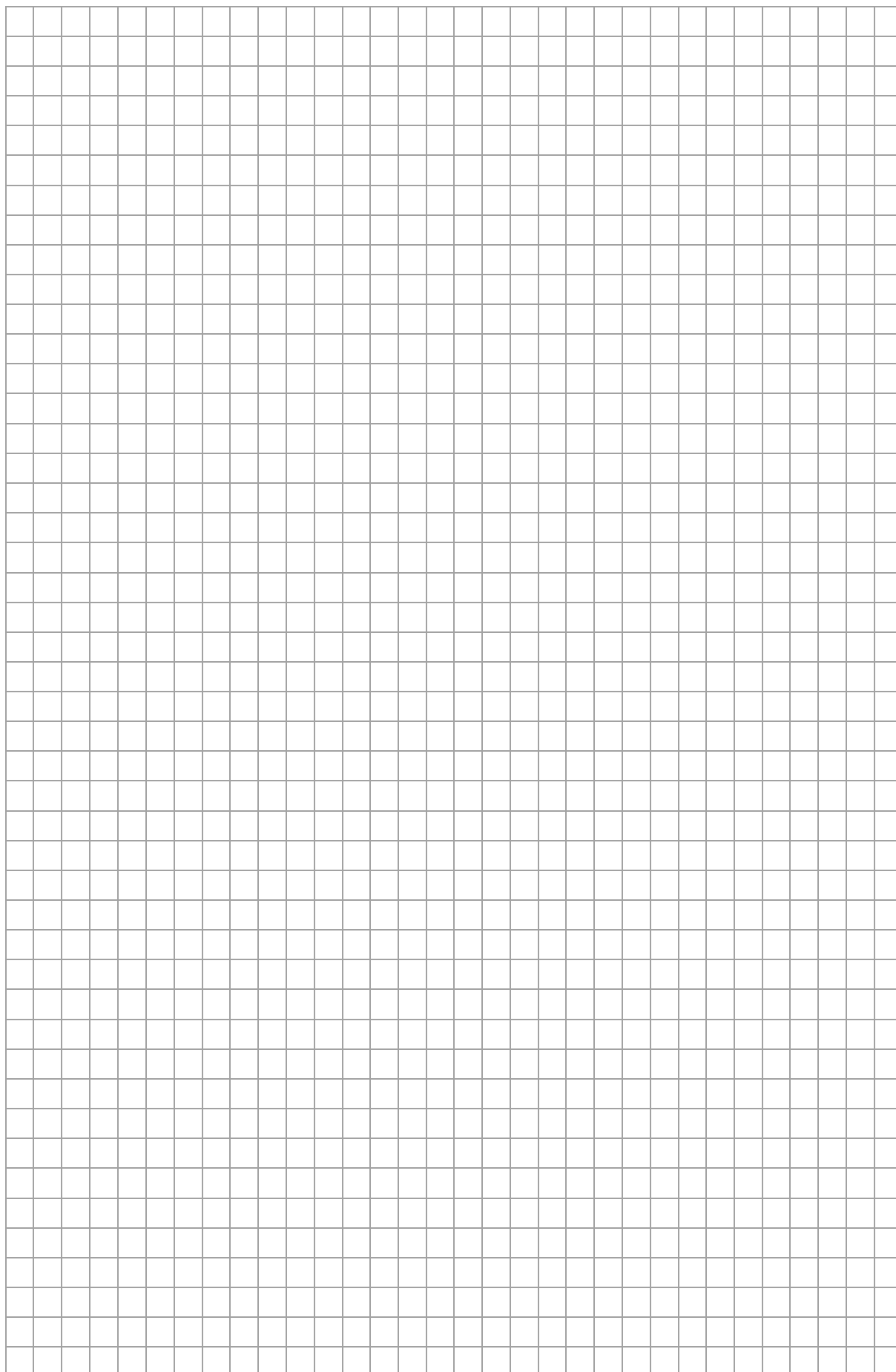
W trapezie  $ABCD$  o podstawach  $AB$  i  $CD$  punkt  $E$  jest środkiem ramienia  $AD$ , a punkt  $F$  jest środkiem ramienia  $BC$  trapezu. Stosunek pola trapezu  $EFCD$  do pola trapezu  $ABFE$  jest równy  $\frac{1}{2}$ .

7.

0–1–  
2–3–4

Wykaż, że  $\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{1}{5}$ .



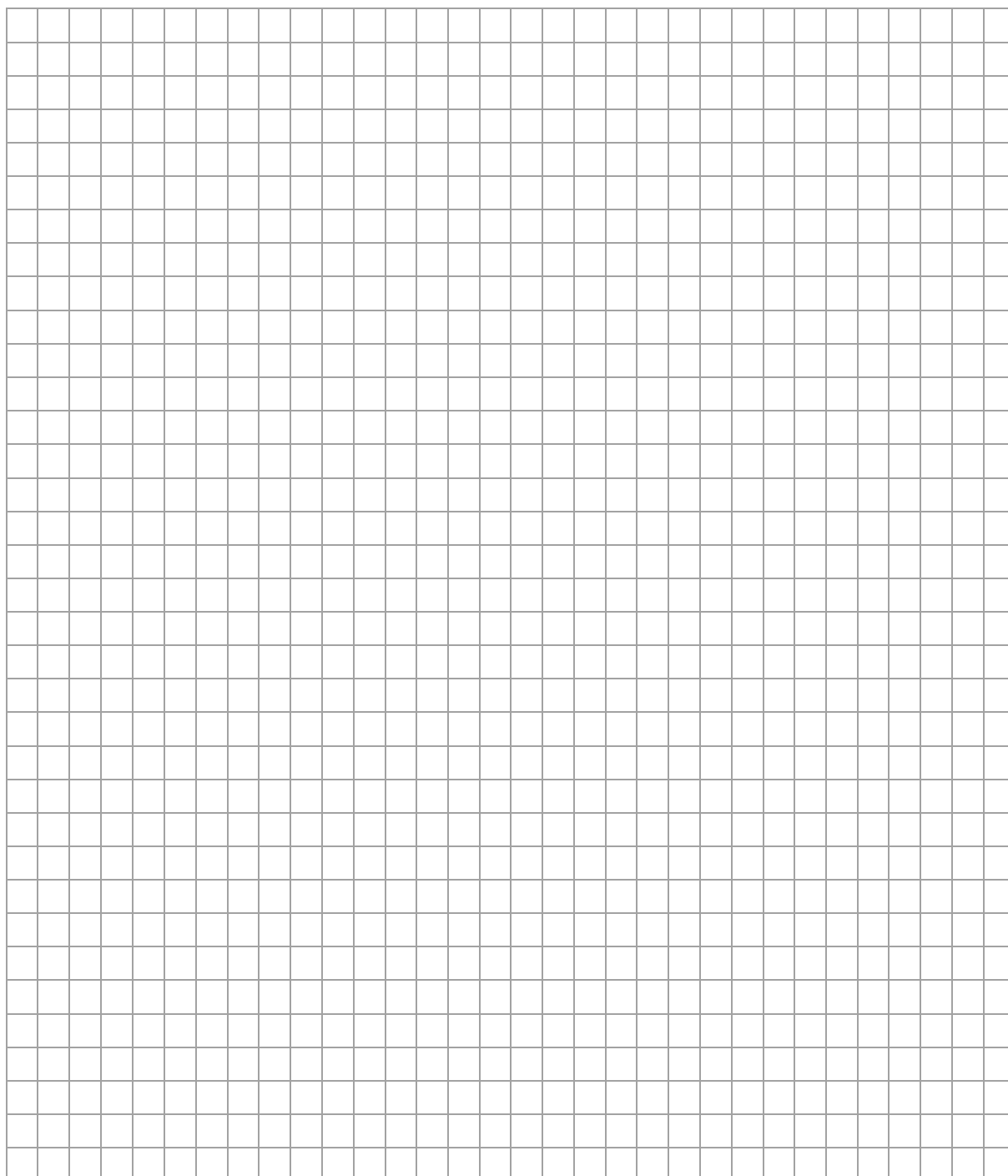


**Zadanie 8. (0–5)**

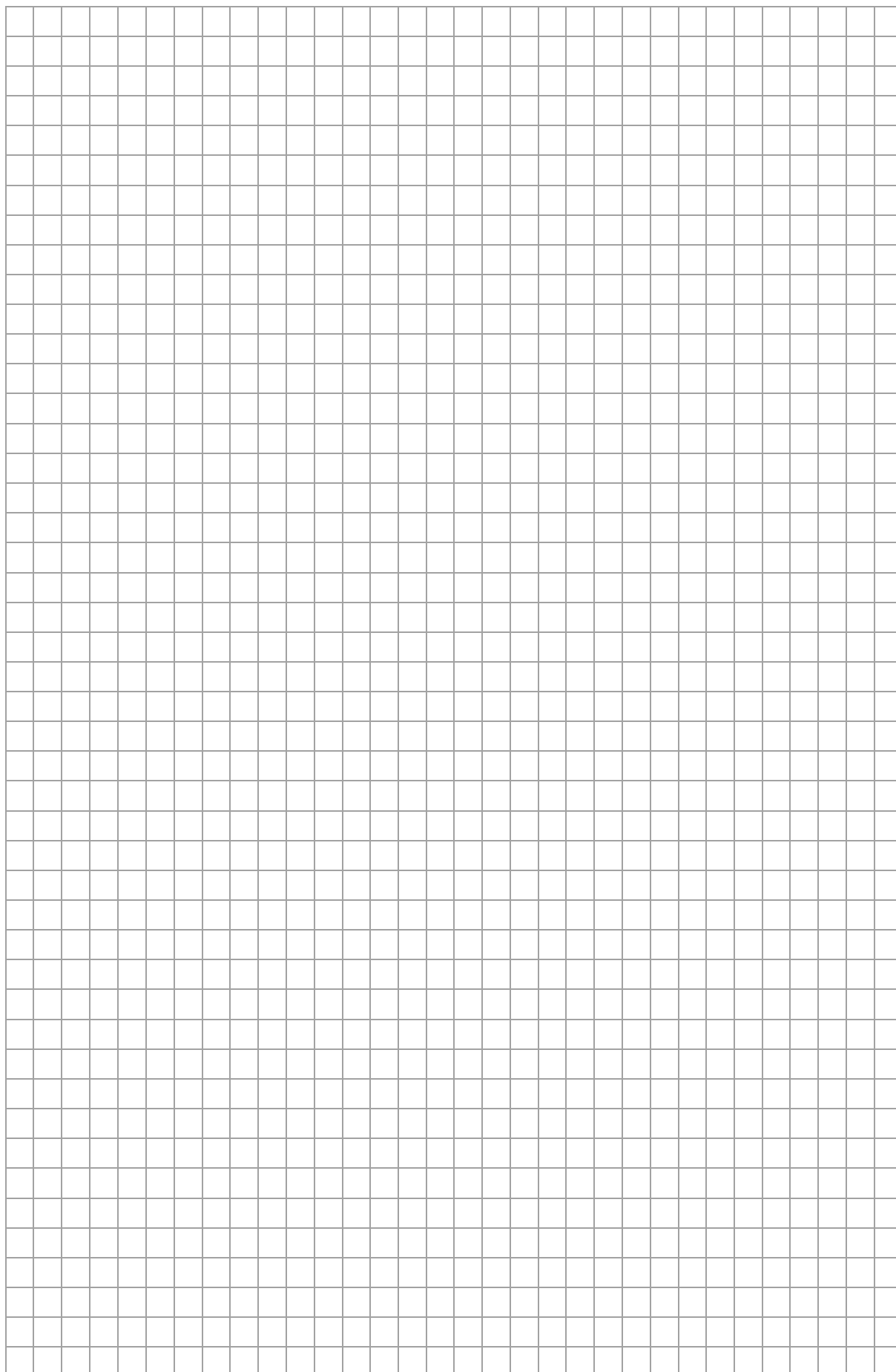
W kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  dane są okręgi  $O_1$  oraz  $O_2$  o równaniach:

- $O_1: (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5$
- $O_2: (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 45$ .

Te okręgi przecinają się w punktach  $A$  oraz  $B$ . Punkt  $A$  ma pierwszą współrzędną dodatnią. Punkt  $M$  spełnia warunek  $\overrightarrow{AM} = -2 \cdot \overrightarrow{BM}$ .

**8.**0–1–  
2–3–  
4–5**Oblicz współrzędne punktów  $A$ ,  $B$  oraz  $M$ . Zapisz obliczenia.**



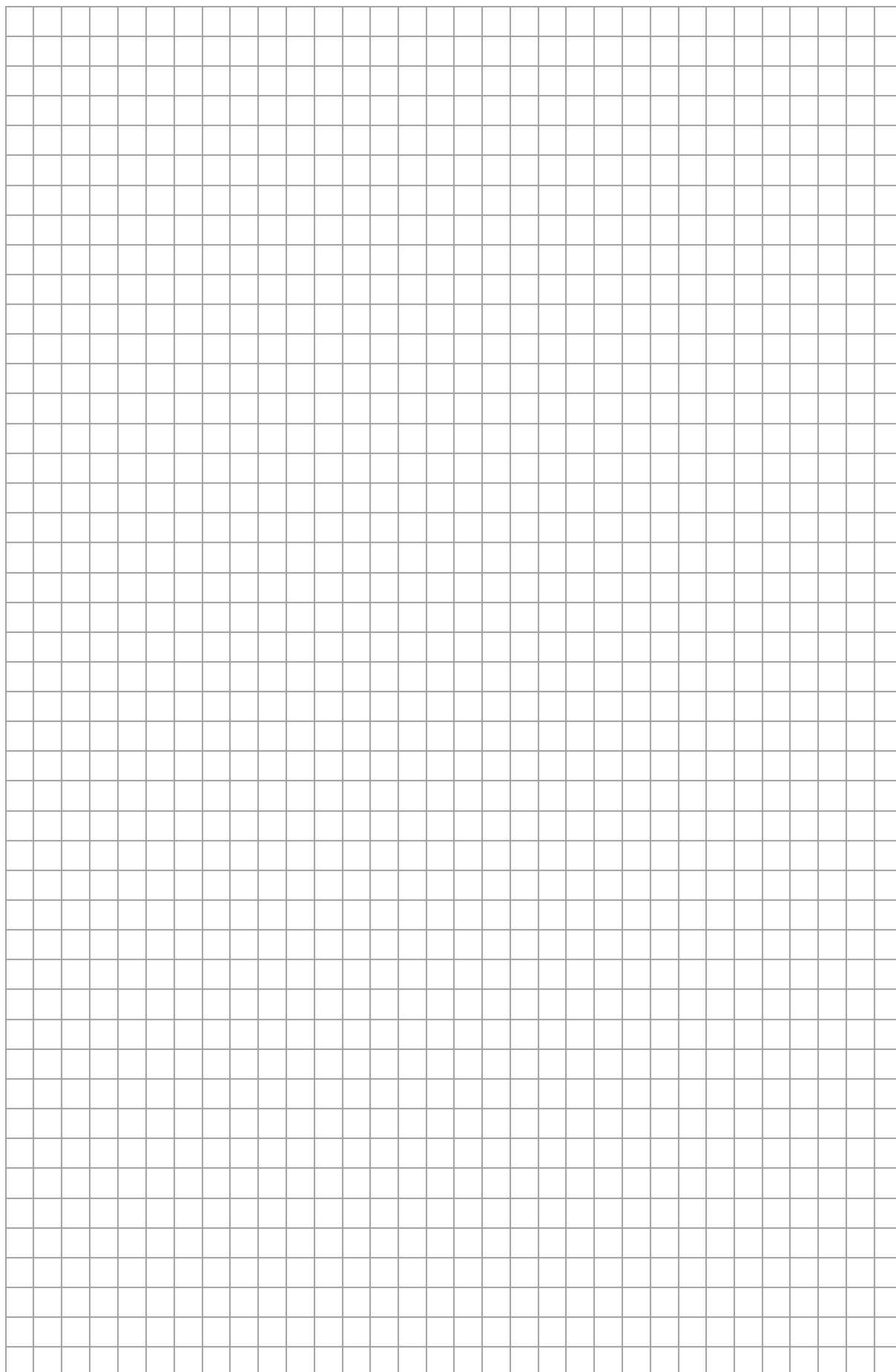


0-1-  
2-3-  
4-5

### Rozwiąż równanie

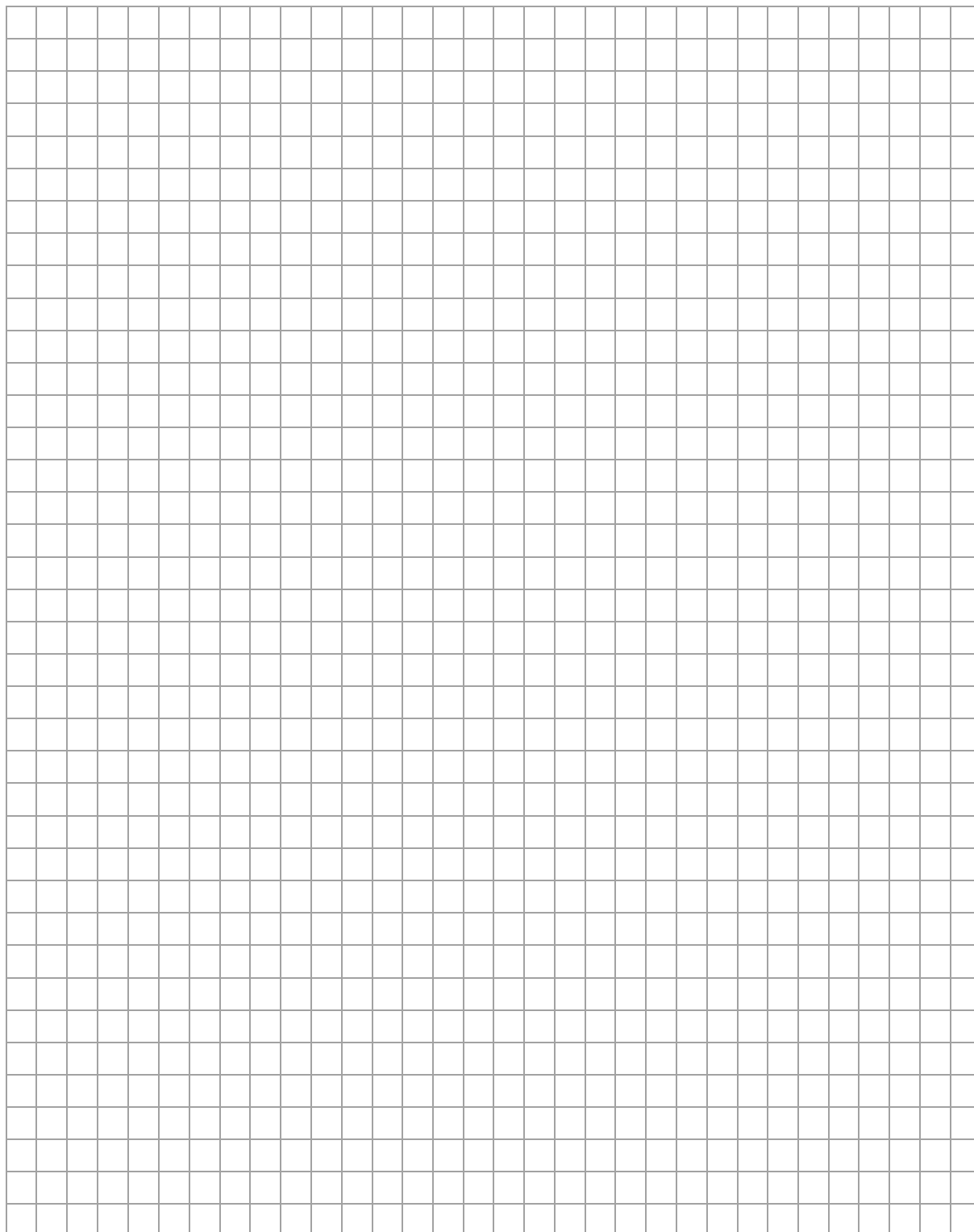
w przedziale  $[-\pi, \pi]$ . Zapisz obliczenia.

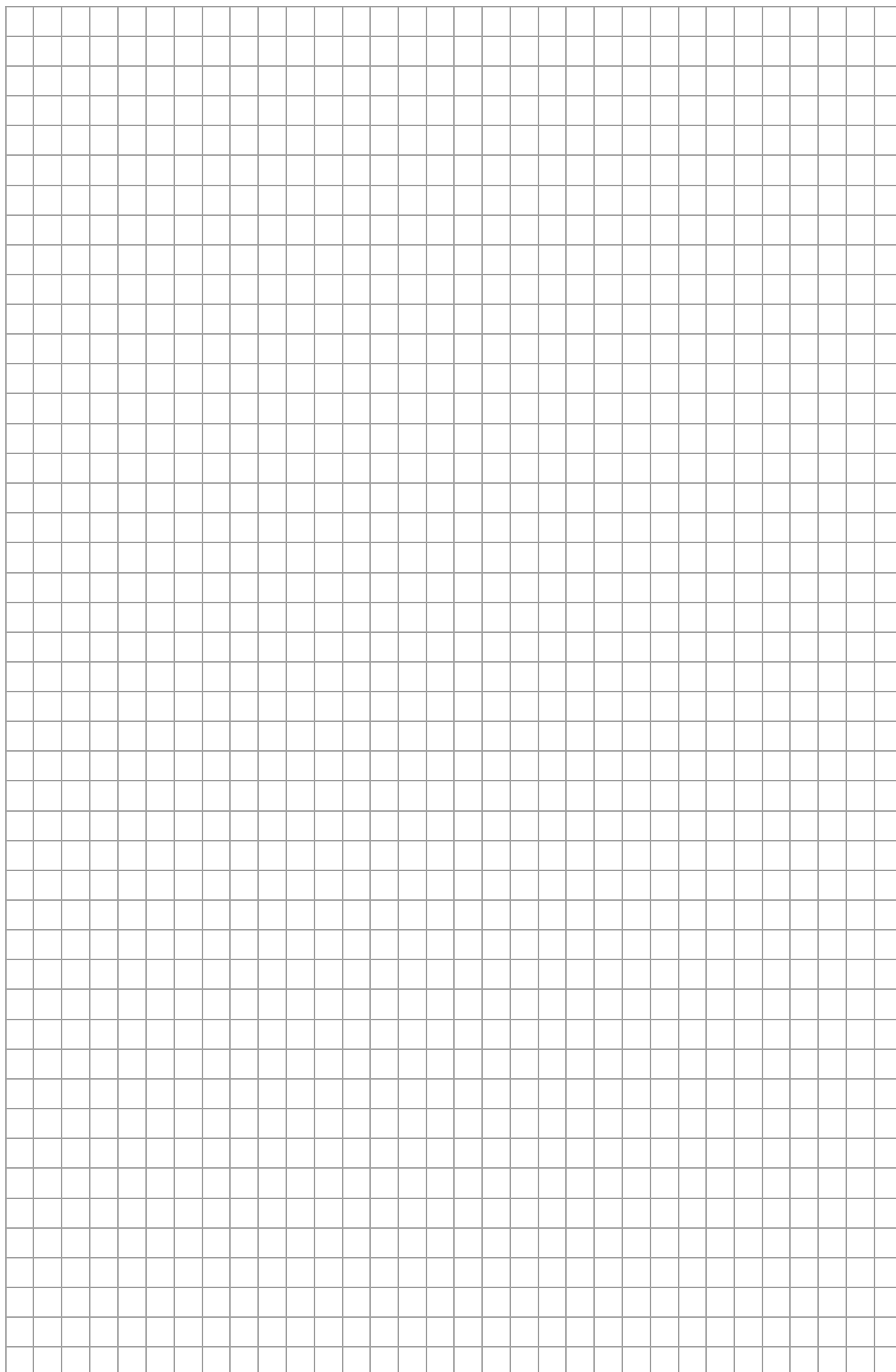
This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.



**Zadanie 10. (0–5)**

Podstawą ostrosłupa  $ABCDS$  jest kwadrat  $ABCD$ . Krawędź boczna  $SA$  jest wysokością ostrosłupa, natomiast krawędź podstawy ma długość  $3\sqrt{34}$ . Cosinus kąta  $\beta$  między ścianami bocznymi  $CDS$  i  $BCS$  tego ostrosłupa jest równy  $\left(-\frac{9}{25}\right)$ .

**10.**0–1–  
2–3–  
4–5**Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.**



### Zadanie 11. (0–6)

Funkcja  $f$  jest określona wzorem

$$f(x) = (2 - m)x^2 - 2(2m + 1)x + m + 8$$

dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ , gdzie  $m$  jest liczbą rzeczywistą różną od 2.

11.	0-1-
	2-3-
	4-5-6

11.	0-1-
	2-3-
	4-5-6

11.	0-1-
	2-3-
	4-5-6

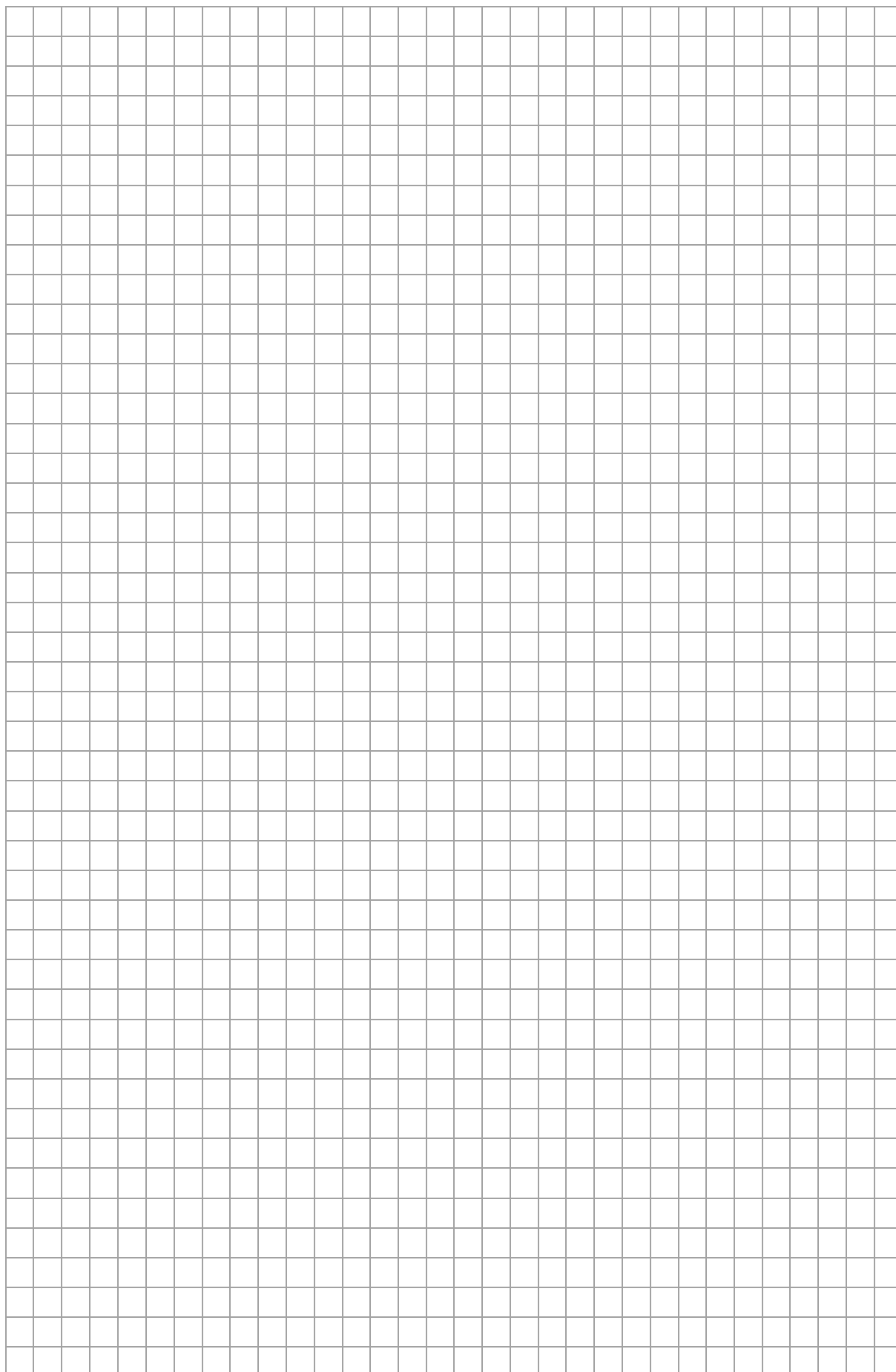
11.	0-1-
	2-3-
	4-5-6

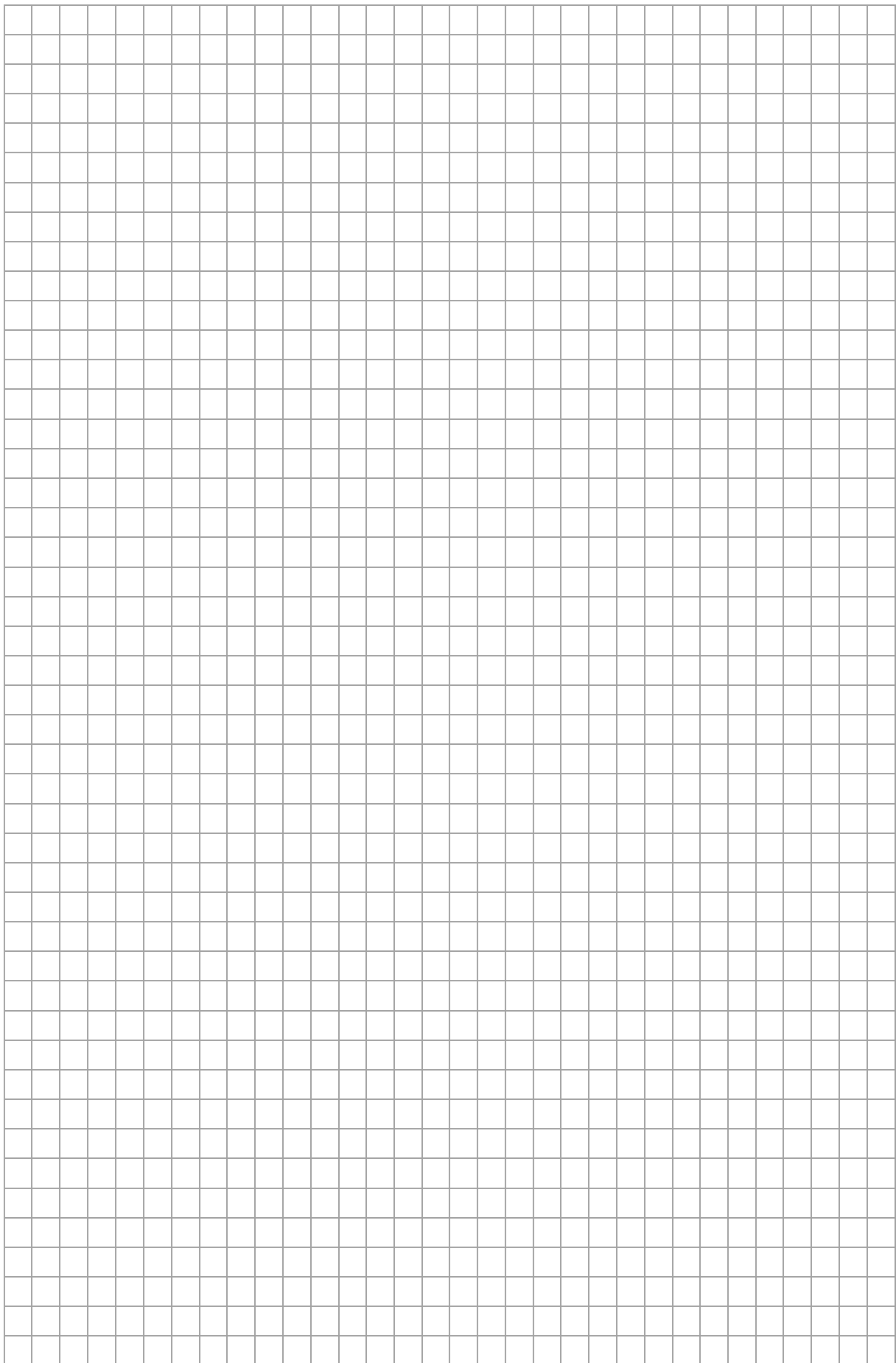
**Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których funkcja  $f$  ma dokładnie dwa miejsca zerowe  $x_1$  oraz  $x_2$  tego samego znaku, które spełniają warunek**

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180$$

**Zapisz obliczenia.**

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.







**Zadanie 12.**

Rozważamy wszystkie stożki, których wysokość jest większa od 5, a odległość środka podstawy od tworzącej jest równa 5.

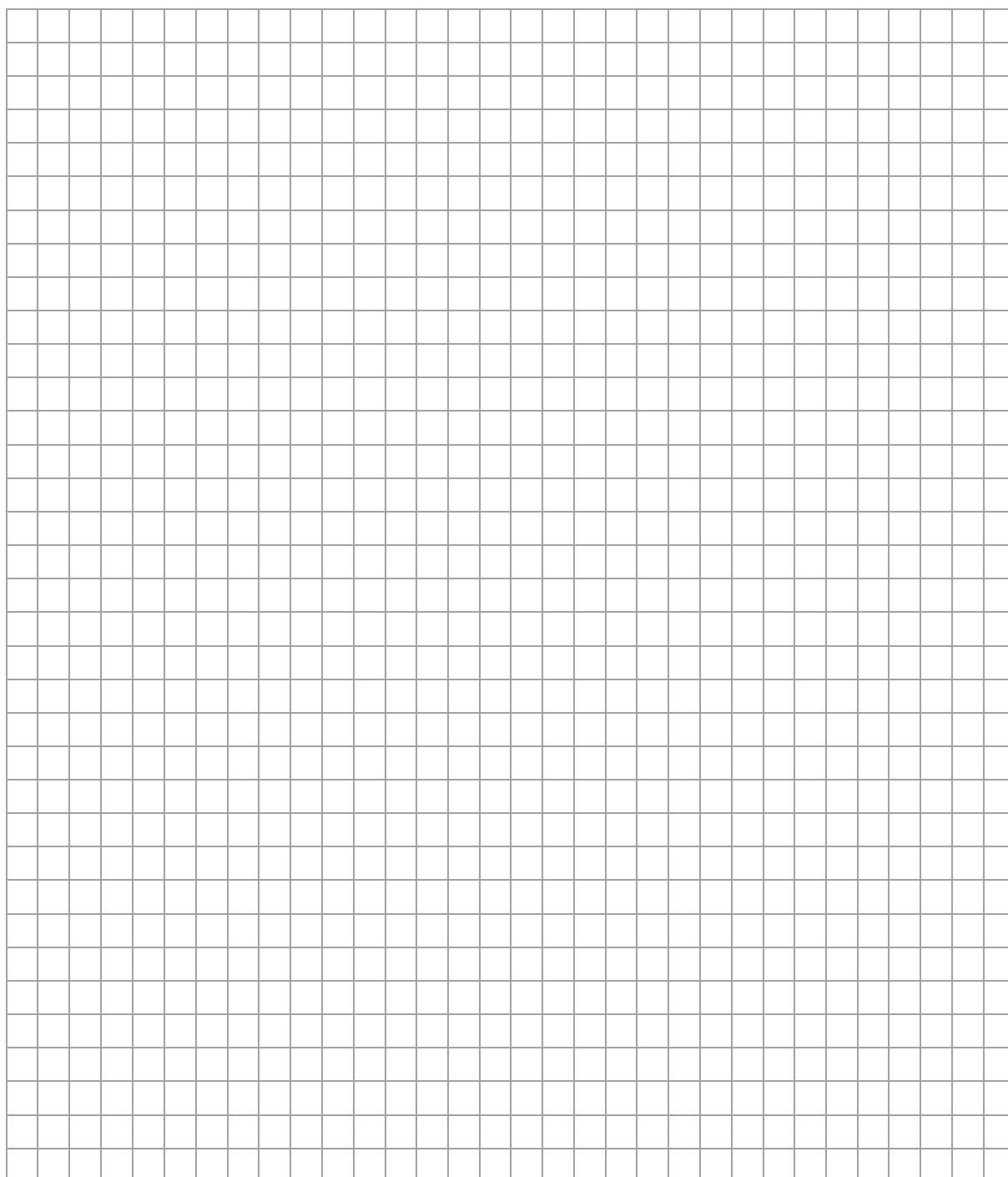
**Zadanie 12.1. (0–2)**

Wykaż, że objętość  $V$  stożka, jako funkcja wysokości  $h$  stożka, wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

12.1.

0–1–2



### Zadanie 12.2. (0–4)

Objętość  $V$  stożka, jako funkcja wysokości  $h$  stożka, wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

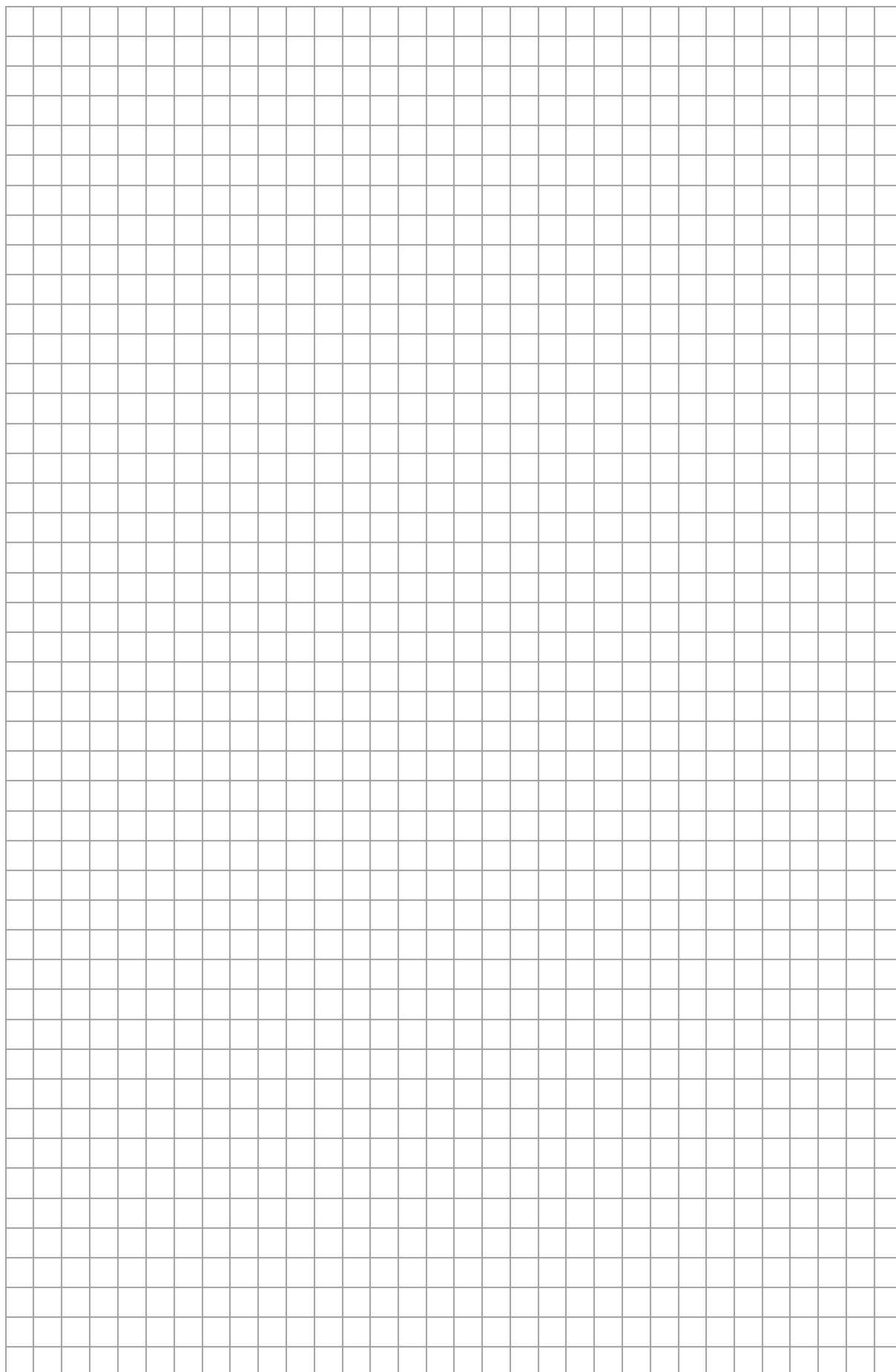
dla  $h \in (5, +\infty)$ .

## 12.2.

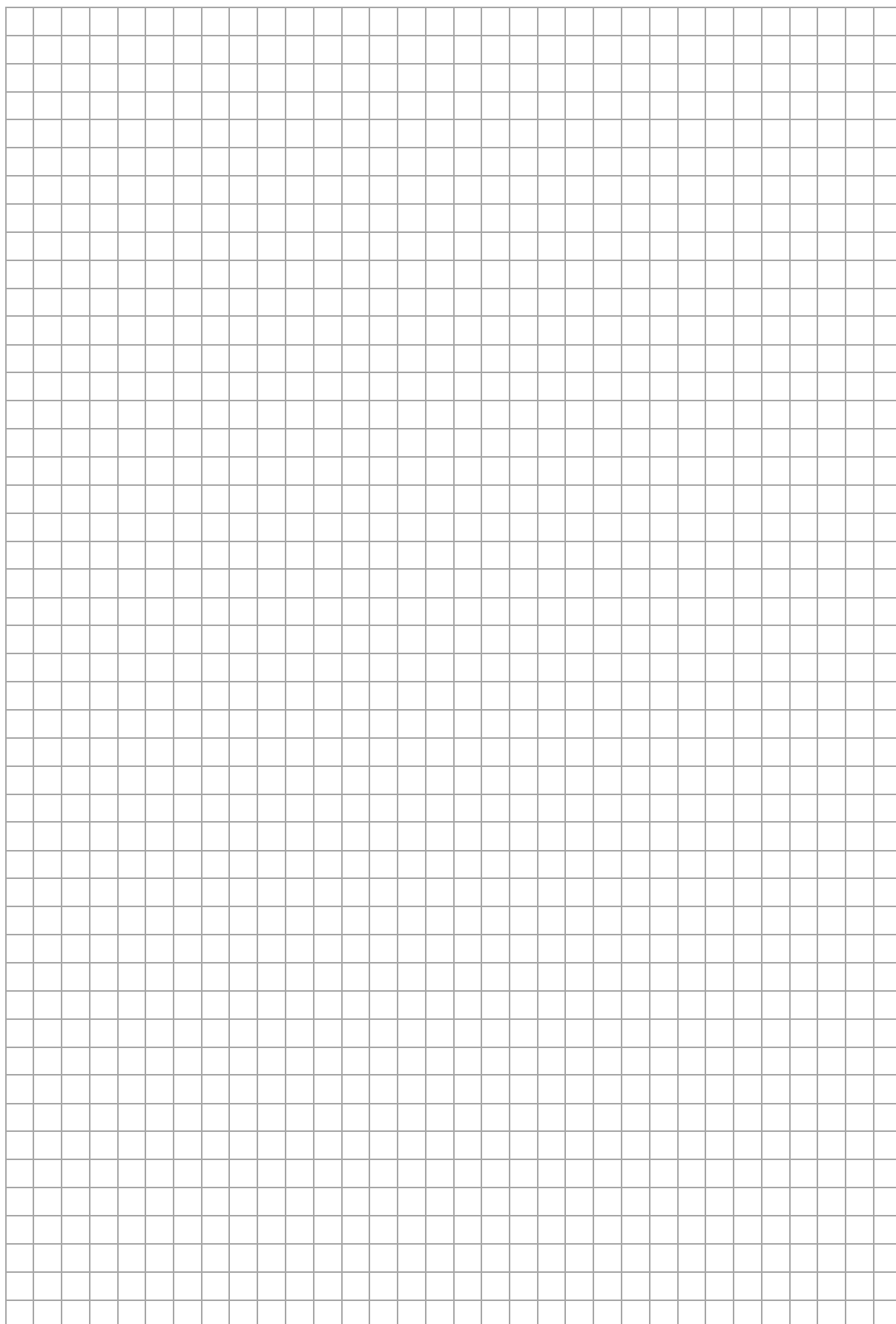
0-1-  
2-3-4

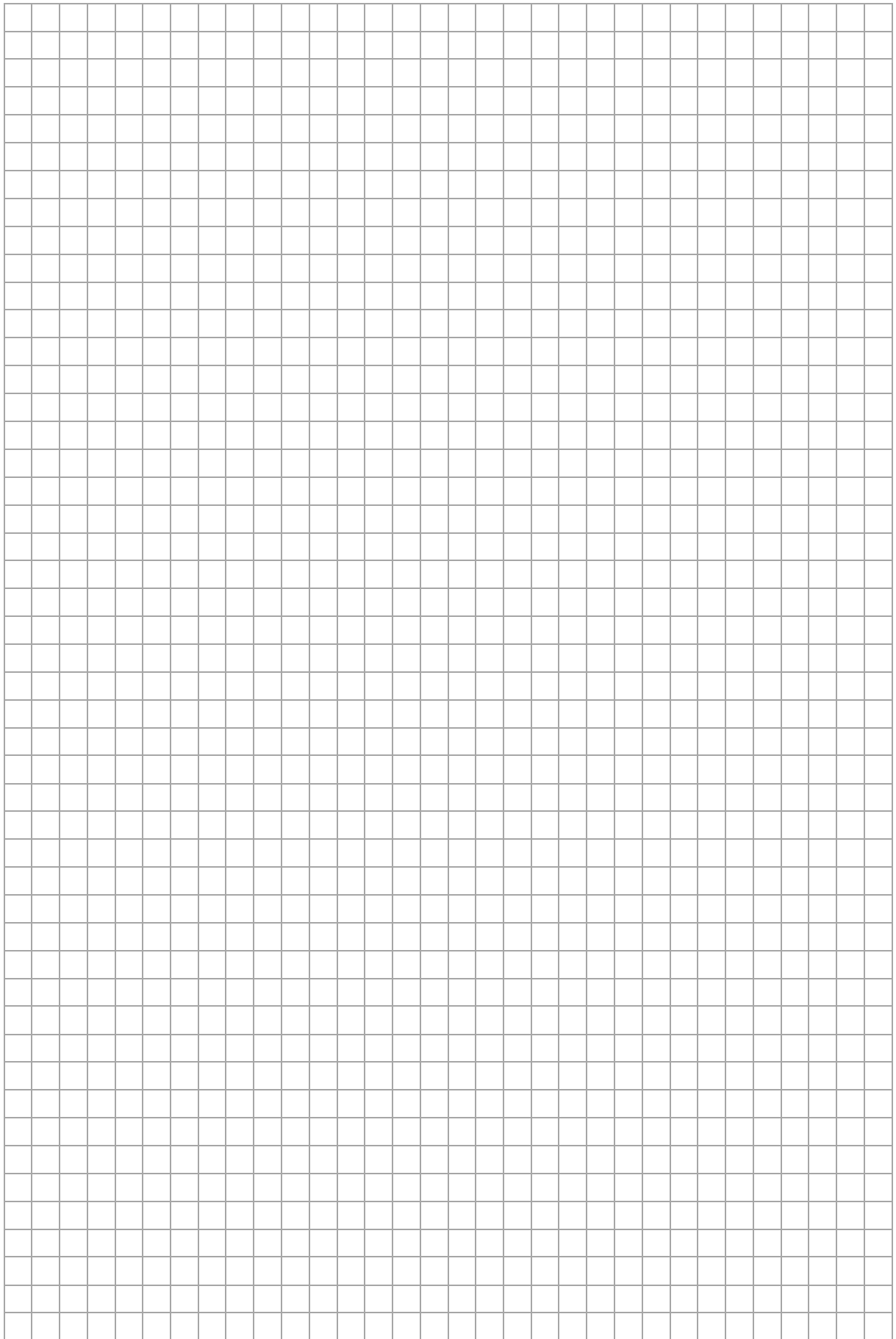
**Wyznacz wysokość tego z rozważanych stożków, którego objętość jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą objętość. Zapisz obliczenia.**

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.



## BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)









# MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

*Formuła 2023*



# MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

*Formuła 2023*



# MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

*Formuła 2023*

